Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória
aula 2

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exemplo - aula 1

- Retome-se o PLI

$$Min \quad z = x_1 - 2x_2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cancel{x_1 - x_2 \geq 0} \\ \left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{array}\right\} X \end{array}\right. \qquad \mathbf{x} \in X$$

- Define-se a função Dual Lagrangeana como sendo:

PLI(**u**): $z(u) = \underset{x \in X}{\text{Min}}\{x_1 - 2x_2 + u(0 - x_1 + x_2)\} =$

$$= \underset{x \in X}{\text{Min}}\{x_1(1-u) + x_2(-2+u)\}$$

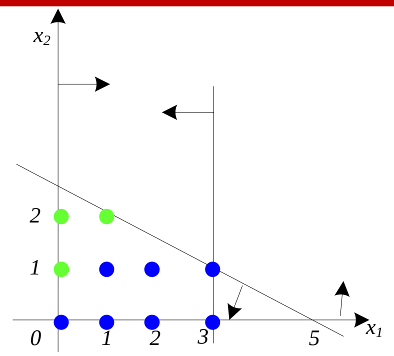
Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente

$$\underset{x\in X}{\mathrm{Min}}\{x_1(1-u)+x_2(-2+u)\}$$

$$X=\begin{cases} x_1+2x_2\leq 5 \\ x_1 \qquad\quad \leq 3 \\ x_1,x_2\in\mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$



$u\leq 1 \quad \ldots$

$u\geq 2 \quad \ldots$

$1\leq u\leq 2 \quad \ldots$

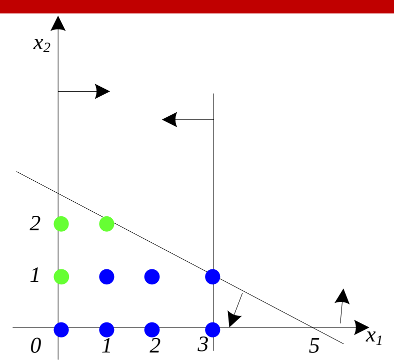
Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente

$$\underset{x\in X}{\mathrm{Min}}\{x_1(1-u)+x_2(-2+u)\}$$

$$X=\begin{cases} x_1+2x_2\leq 5 \\ x_1 \qquad\quad \leq 3 \\ x_1,x_2\in\mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$



$u\leq 1 \quad \ldots \qquad \tilde{\mathbf{x}}=(0,2)$

$$\begin{aligned} z(u)&=x_1(1-u)+x_2(-2+u)= \\ &=0(1-u)+2(-2+u)= \\ &=2u-4 \end{aligned}$$

$u\geq 2 \quad \ldots \qquad \tilde{\mathbf{x}}=(3,0)$

$$\begin{aligned} z(u)&=x_1(1-u)+x_2(-2+u)= \\ &=3(1-u)+0(-2+u)= \\ &=3-3u \end{aligned}$$

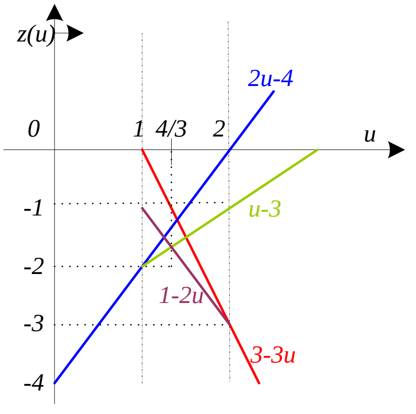
$1\leq u\leq 2 \quad \ldots$

Otimização Inteira

Exemplo

- Função Dual Lagrangeana

$$z(u)=\begin{cases} 2u-4 & \text{se} \quad 0\le u\le 1 \\ u-3 & \text{se} \quad 1\le u\le \frac{4}{3} \\ 1-2u & \text{se} \quad \frac{4}{3}\le u\le 2 \\ 3-3u & \text{se} \quad u\ge 2 \end{cases}$$

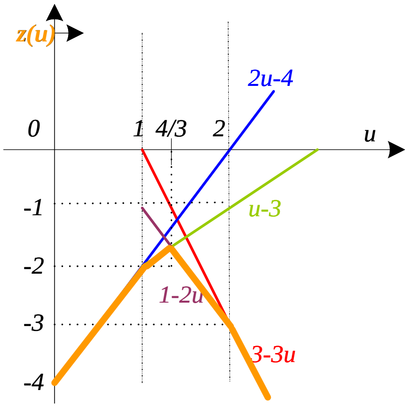


Otimização Inteira

Exemplo

- Função Dual Lagrangeana

$$z(u)=\begin{cases} 2u-4 & \text{se} \quad 0\le u\le 1 \\ u-3 & \text{se} \quad 1\le u\le \frac{4}{3} \\ 1-2u & \text{se} \quad \frac{4}{3}\le u\le 2 \\ 3-3u & \text{se} \quad u\ge 2 \end{cases}$$

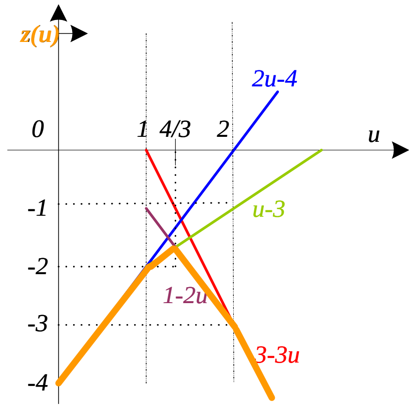


OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exemplo

- Função Dual Lagrangeana

$$z(u)=\begin{cases}2u-4 & \text{se} \quad 0\le u\le 1\\ u-3 & \text{se} \quad 1\le u\le \frac{4}{3}\\ 1-2u & \text{se} \quad \frac{4}{3}\le u\le 2\\ 3-3u & \text{se} \quad u\ge 2\end{cases}$$



$$w_{DL}=\max_{u\ge 0}\{z(u)\} \quad \Rightarrow \quad u = 4/3$$

$$w_{DL}=-\frac{5}{3}=z^*_{RL}\le z^*=-1$$

O Dual Lagrangeano é um problema não linear!

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exemplo

- Graficamente – PLI ($u = 4/3$)

$$\tilde{z}(4/3)= Min \ -\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2\le 5\\ x_1\le 3\\ x_1,x_2\in \mathbf{Z}_0^+\end{cases}$$

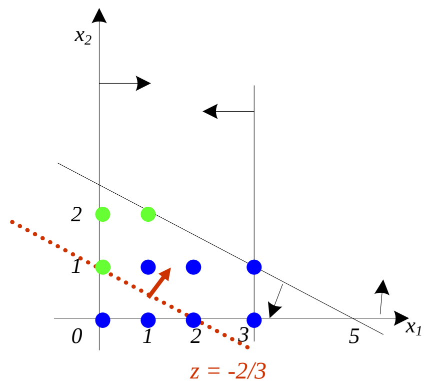
Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente – PLI(u)

$$\tilde{z}(4/3) = Min\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$



$$\tilde{\mathbf{x}} = (1\,;2) \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{x}} = (3\,;1)$$

$$\tilde{z}(4/3) = -\frac{5}{3} = z_{RL}$$

Otimização Inteira

Exemplo

- Fixando $u = 4/3$, e resolvendo PLI(u)

$$z(\tilde{u}) = \underset{\mathbf{x} \in X}{Min}\left\{ x_1 - 2x_2 + \frac{4}{3}(-x_1 + x_2) \right\}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \boxed{}$$

$$\tilde{z}(4/3) = \boxed{}$$

Solver...

- Do Solver podemos ver que a restrição relaxada não é verificada!
- Haverá algum valor para u para o qual a SO de PLI(u) seja a SO de PLI?
- E se tivéssemos relaxado a 2ª restrição em vez da 1ª?

Otimização Inteira

Relaxações

- Dado um PLI de minimização: $z = Min\left\{\mathbf{cx} : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \text{ , } \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$
- Uma relaxação de PLI é o problema: $z' = Min\left\{\mathbf{cx} : \mathbf{x} \in X\right\}$
- Se juntarmos as restrições "complicadas" à FO considerando multiplicadores

obtemos, para $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_m)$ fixo, o problema:

PLI(u): $z(u) = Min\left\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) : \mathbf{x} \in X\right\}$

- PLI(u) é uma relaxação de PLI – Relaxação Lagrangeana
- u é o vector de multiplicadores de Lagrange – variáveis duais!

Otimização Inteira

Relaxações

- PLI(u) é uma relaxação de PLI, pois:

$$X \supseteq \left\{\mathbf{x} \in X : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\right\}$$

$$\mathbf{cx} + \underbrace{\mathbf{u}}_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}}\underbrace{(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})}_{\mathbf{b} - \mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}} \leq \mathbf{cx}$$

Teor.: Fraco da Dualidade Lagrangeana: $z(\mathbf{u}) \leq z, \ \forall \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$

- Pretendemos obter o máximo valor de $z(\mathbf{u})$, resolvendo o Dual Lagrangeano:

$$w_{DL} = \mathbf{max}\left\{z(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\right\}$$

E se:

Restrições Relaxadas "≥" ou "=" ?

Otimização Inteira

Relaxações

Teor.: Forte da Dualidade Lagrangeana: Se $\tilde{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$,

i. $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. de PLI$(\tilde{\mathbf{u}})$ e

ii. $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$ (SPA) e

iii. $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ (complementaridade)

então, $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. De PLI.

Prova:

Otimização Inteira

Relaxações

Teor.: Forte da Dualidade Lagrangeana: Se $\tilde{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$,

i. $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. de PLI$(\tilde{\mathbf{u}})$ e

ii. $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$ (SPA) e

iii. $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ (complementaridade)

então, $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. De PLI.

Prova:

$$w_{DL} = \max_{\mathbf{u}\geq\mathbf{0}} \{z(\mathbf{u})\} \geq z(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) \underset{\text{(iii)}}{=} \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} \underset{\text{(ii) } \tilde{\mathbf{x}} \text{ é SA de PLI}}{\geq} z^*$$

Sendo relaxação, $w_{DL} \leq z^* \Rightarrow w_{DL} = z^*$

Otimização Inteira

Relaxações

- Dualidade Lagrangeana – se podemos obter apenas minorantes com o problema dual (de difícil resolução!) – com a Dualidade Lagrangeana podemos reforçar tais limites!

- Árvore geradora mínima (SST) com restrições (capacidade ou grau)
  - SST
  - com restrições relaxadas penalizadas e juntas à F.O.!

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

PLI $z = Min\left\{\mathbf{cx} : \boxed{\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$

PLI (u) $z(u) = Min\left\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) : \mathbf{x} \in X\right\}$

DL $w_{DL} = \max_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}}\{z(\mathbf{u})\}$

$z(u) \leq z$

$w_{DL} \leq z$

PLI $z = Min\left\{\mathbf{cx} : \boxed{\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\ , \mathbf{Dx} \leq \mathbf{d}\ , \mathbf{Tx} = \mathbf{t}}\ \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$

PLI (u) $z(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) = Min\left\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) + \mathbf{v}\boxed{(\mathbf{d} - \mathbf{Dx})} + \mathbf{y}\boxed{(\mathbf{t} - \mathbf{Tx})} : \mathbf{x} \in X\right\}$

DL $w_{DL} = max\{z(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{y}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\ , \boxed{\mathbf{v} \leq \mathbf{0}}\ ; \boxed{\mathbf{y}\ livre}\}$

≥ 0 $= 0$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

PLI $z = Max\left\{\mathbf{cx} : \boxed{\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$

PLI (u) $z(u) = Max\left\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}\boxed{(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})} : \mathbf{x} \in X\right\}$

DL $w_{DL} = \min_{\mathbf{u} \ge 0}\{z(\mathbf{u})\}$

≥ 0

$z(\mathbf{u}) \ge z$

$w_{DL} \ge z$

PLI $z = Max\left\{\mathbf{cx} : \boxed{\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}, \mathbf{Dx} \ge \mathbf{d}, \mathbf{Tx} = \mathbf{t}}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$

PLI (u) $z(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) = Min\left\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) + \mathbf{v}\boxed{(\mathbf{d} - \mathbf{Dx})} + \mathbf{y}(\mathbf{t} - \mathbf{Tx}) : \mathbf{x} \in X\right\}$

DL $w_{DL} = min\{z(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) : \mathbf{u} \ge 0, \boxed{\mathbf{v} \le 0}; \mathbf{y}\ livre\}$

$\boxed{\le 0}$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

➢ Prova-se que o valor <u>ótimo</u> do Dual Lagrangeano nunca é pior que o da relaxação linear:

$$z_{RL} \le w_{DL} \le z^*$$

➢ Quando um problema goza da **propriedade de integralidade** o valor ótimo do Dual Lagrangeano coincide com o da sua relaxação Linear:

$$z_{RL} = w_{DL} \le z^*$$

➢ Como obter "bons" multiplicadores de Lagrange?

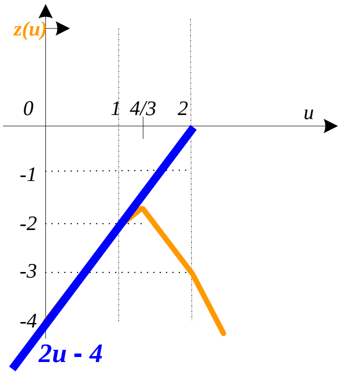
$$\mathbf{u} = ?$$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exemplo

- Resolver o Dual Lagrangeano de um PLI – Problema Não Linear!
- A Função Dual, $z(\mathbf{u})$, é:
  - Linear por troços e côncava
- Se, ao fixar $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$
  - $z(\tilde{\mathbf{u}})$ tiver SO única, $\tilde{\mathbf{x}}$

  $\Longrightarrow$ $z(\tilde{\mathbf{u}})$ é diferenciável com gradiente $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$



Ex.: $z(\tilde{u}) = \underset{\mathbf{x} \in X}{\text{Min}} \{x_1(1-\tilde{u}) + x_2(\tilde{u}-2)\}$ ⊕ ⊖

$\tilde{u} < 1$:

gradiente: $-x_1 + x_2 = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$ em $\tilde{\mathbf{x}} = (0,2)$ declive de $z(\mathbf{u})$!

• • •

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exercícios

1. Escrever a Relaxação Lagrangeana dos seguintes PLI, relaxando as restrições assinaladas com (*):

a) $Max\ Z = 16x_1 + 10x_2 + 4x_4$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10 & (*) \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \boldsymbol{\mathcal{B}} \end{cases}$$

b) $Min\ Z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 3 & (*) \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 3 & (*) \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

2. Resolver os problemas relaxados do exercício 1 considerando, em cada alínea, os multiplicadores seguintes:

   a) i) $u = 2$; ii) $u = 0{,}5$; iii) $u = 6$; iv) $u = 1$

   b) i) $\mathbf{u} = (1,1)$; ii) $\mathbf{u} = (0,1)$; iii) $\mathbf{u} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$; iv) $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

   Indique, em cada alínea, o valor do melhor bound encontrado bem como a respetiva solução

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Trabalho 1

Considere o seguinte prolema de PLIM

$$Min\ 8x_{11}+7x_{21}+4x_{22}+x_{31}+3x_{32}+36y_1+12y_2+36y_3$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}\geq 6 \quad (*) \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}\geq 6 \quad (*) \\ x_{11}+x_{12}\leq 12y_1 \\ x_{21}+x_{22}\leq 12y_2 \\ x_{31}+x_{32}\leq 12y_3 \\ y_i\in\{0,1\}\ ;\ 0\leq x_{ij}\leq 6 \qquad i=1,2,3;\ j=1,2 \end{cases}$$

a) Considerando $\mathbf{u}=(4,6)$ defina e resolva a relaxação Lagrangeana do problema, relaxando as restrições assinaladas com (*).

b) Identificar este problema como uma instância de um problema estudado no mestrado, definindo as variáveis de forma compatível.